

Capitolo Settimo

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

§ 1. IL RAPPORTO INCREMENTALE E LA NOZIONE DI DERIVATA

Siano dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E . Vogliamo studiare il comportamento della f nei punti vicini a x_0 . Il modo più naturale per affrontare questo studio è quello di misurare l'incremento dei valori della funzione con l'incremento della variabile.

Dato $x \in E \setminus \{x_0\}$, si ponga $\Delta x := x - x_0$, da cui $x = x_0 + \Delta x$. Ci si esprime dicendo che, passando da x_0 a x , si è dato alla variabile indipendente un *incremento* $\Delta x (\neq 0)$. Naturalmente Δx può anche essere negativo. In corrispondenza all'incremento Δx della variabile indipendente, si trova un incremento dei valori della funzione $\Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Anche l'incremento Δf può essere negativo; anzi, mentre Δx è, per definizione, diverso da zero, l'incremento Δf può risultare nullo (si pensi alla funzione seno e ad un incremento $\Delta x = 2\pi$). Come si è detto, interessa misurare Δf assumendo come unità di misura Δx .

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E , si chiama *rapporto incrementale della f , relativamente al punto iniziale x_0* , la funzione $R_{x_0}^f$ di $E \setminus \{x_0\}$ in \mathbb{R} definita da

$$R_{x_0}^f(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Posto, come sopra, $x = x_0 + \Delta x$, la funzione rapporto incrementale assume la forma

$$R_{x_0}^f(\Delta x) := \frac{\Delta f}{\Delta x}(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

definita nell'insieme $\{\Delta x: x_0 + \Delta x \in E \setminus \{x_0\}\}$. Spesso, in luogo di Δx , si preferisce usare una sola lettera, per esempio la h , scrivendo la funzione rapporto incrementale nella forma

$$R_{x_0}^f(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

ESEMPLI. 1) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$. Si ha:

$$R_{x_0}^f(x) := \frac{mx + q - mx_0 - q}{x - x_0} = m.$$

La funzione rapporto incrementale $R_{x_0}^f(x)$ è dunque costante. Viceversa, se è $R_{x_0}^f(x) = m$, si ottiene subito $f(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$. Dunque, le funzioni con rapporto incrementale costante sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = mx + q$.

2) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Posto $x_0 = 2$, si ha:

$$R_2^f(x) = \frac{\frac{x+2}{x-1} - \frac{2+2}{2-1}}{x-2} = \frac{x+2-4x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{x-1}.$$

Il rapporto incrementale ha un'interpretazione geometrica (cfr. l'Es. del § 2 del Cap. 5); esso dà il coefficiente angolare della retta *secante* (il grafico della f) per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$.

Interpretazione cinematica. Se $f(x)$ esprime lo spazio (orientato) percorso, in dipendenza del tempo x , da un corpo che si muove di moto rettilineo, il rapporto incrementale dà la *velocità media* del moto nell'intervallo di tempo $[x_0, x]$.

È ora naturale chiedersi che cosa succede quando l'incremento Δx tende a 0.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E . Se esiste il limite del rapporto incrementale della f , al tendere di x a x_0 , questo è detto la *derivata* della f in x_0 ed è indicato con $f'(x_0)$ o con $\frac{df}{dx}(x_0)$. È dunque

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Posto, come sopra, $x - x_0 = \Delta x$, oppure $x - x_0 = h$, si ha anche

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se il limite del rapporto incrementale della f , al tendere di x a x_0 , esiste ed è finito, ossia se è $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, si dice che la f è *derivabile* in x_0 .

Dunque l'espressione " f è derivabile in x_0 " ha un significato diverso da "esiste $f'(x_0)$ ".

ESEMPLI. 3) Se è $f(x) = mx + q$, si ha $f'(x_0) = m$. La f è derivabile in x_0 , per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

4) Se è $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, si ha $f'(2) = -3$. La f è dunque derivabile in $x_0 = 2$.

5) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Si ha

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Esiste dunque $f'(0) = +\infty$, ma la f non è derivabile in 0.

6) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e sia $x_0 =$

0. Si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x},$$

che non ha limite per $x \rightarrow 0$. La f non ha dunque derivata in 0, né finita, né infinita.

7) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, ancora con $x_0 = 0$. Si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Anche in questo caso, il rapporto incrementale non ha limite per $x \rightarrow 0$. Questa volta però esistono i limiti per $x \rightarrow 0^-$ ($= -1$) e per $x \rightarrow 0^+$ ($= 1$).

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E . Se esiste il limite del rapporto incrementale della f , al tendere di x a x_0^- [a x_0^+] questo è detto la *derivata sinistre* [*destra*] della f in x_0 ed è indicato con $f'(x_0^-)$ [$f'(x_0^+)$].

Nel caso della funzione dell'Esempio 7, si ha dunque $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$.

ESEMPLI. 8) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e sia $x_0 = 0$. Si ha $f'(0^-) = 0$, mentre sappiamo che non esiste $f'(0^+)$.

9) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Si ha, come subito si vede, $f'(0) = f'(0^+) = +\infty$, mentre non ha ovviamente senso ricercare la derivata sinistre in 0.

TEOREMA 1. Siano dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E . Se la f è derivabile in x_0 , allora f è continua in tale punto.

DIM. Dobbiamo provare che è $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Ora si ha:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Da ciò si ricava immediatamente la tesi, dato che, per ipotesi, il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ha un limite finito. ■

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema.

Inoltre, dal fatto che la f ha in un punto x_0 del suo dominio derivata infinita, nulla si può dedurre circa la sua continuità in x_0 .

ESEMPLI. 10) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma, come si è visto, non è ivi derivabile.

11) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha in 0 derivata infinita ed è ivi continua.

12) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in 0, ma si ha

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = +\infty.$$

Si è già detto che, da un punto di vista geometrico, il rapporto incrementale $R_{x_0}^f(x)$ dà il coefficiente angolare della retta *secante* $r(x)$ per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$. Esso è dunque la tangente dell'angolo acuto $\alpha(x) = \widehat{sP_0r}$ che la r forma con la retta s passante per P_0 e parallela all'asse delle ascisse. Qual è il significato della derivata?

Supponiamo dunque che una funzione f sia derivabile in un punto x_0 del suo dominio. Sia poi β l'angolo $\widehat{sP_0t}$ che la retta t passante per P_0 e di coefficiente angolare $f'(x_0)$ forma con la retta s . Ora si ha:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha(x)) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha(x)}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha(x)} = \frac{f'(x_0) - R_{x_0}^f(x)}{1 + f'(x_0) R_{x_0}^f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Ne viene che l'angolo $\widehat{r(x)P_0t}$ tende a 0. Ciò si esprime dicendo che la retta secante $r(x)$ *tende* alla retta t che, come è ben noto, viene detta *tangente* al grafico della f nel punto P_0 . Si potrebbe provare che sussiste anche l'implicazione opposta, cioè che se esiste la tangente al grafico della f nel punto P_0 e questa non è parallela all'asse delle ordinate, allora la f è derivabile in x_0 e il coefficiente angolare della retta tangente è dato da $f'(x_0)$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Se la f è derivabile in ogni punto $x \in E$, si dice che la f è *derivabile* in E . Associando ad ogni $x \in E$ il valore $f'(x)$, si definisce una nuova funzione $f': E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ che è detta la *funzione derivata*.

Può naturalmente accadere che la f non sia derivabile in *tutto* E , ma solo in un sottoinsieme E' di E . Si otterrà dunque una funzione $f' = D(f) = \frac{df}{dx}: E'(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Per esempio, se si parte dalla funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, si ottiene una funzione derivata $f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in E . Se anche la funzione f' è derivabile in E , la sua derivata è detta *derivata seconda della f* e si indica con f'' . Se anche f'' è derivabile, si ottiene la *derivata terza* f''' . Se f''' è derivabile, si ottiene la *derivata quarta* $f^{(4)}$, e così via. La derivata n -*ima* si indica con $f^{(n)}$.

ESEMPIO. 13) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Essendo (cfr. anche Cap. 5, § 2), $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x$, per $h \rightarrow 0$, si ottiene che è $f'(x) = 2x$. Ma allora, per quanto visto più su, è $f''(x) = 2, f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$.

DEFINIZIONE. Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Una funzione continua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è detta di *classe* C^0 in I . Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è detta di *classe* C^1 in I se è derivabile in I con derivata continua; f è detta di *classe* C^n [C^∞] in I se è n volte derivabile in I e la sua derivata n -*ima* è continua [se è infinite volte derivabile in I , ossia se ammette in I le derivate di tutti gli ordini]. L'insieme delle funzioni di classe C^n [C^∞] in I si indica con $C^n(I)$ [$C^\infty(I)$].

§ 2. REGOLE DI DERIVAZIONE

Derivata della somma e del prodotto

TEOREMA 2. Siano date due funzioni $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x_0 \in E$ e sia c un numero reale. Allora:

- 1) La funzione cf è derivabile in x_0 e si ha $D(cf)(x_0) = cf'(x_0)$.
- 2) La funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha $D(f + g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- 3) La funzione fg è derivabile in x_0 e si ha $D(fg)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

DIM. 1) Si ha
$$\frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow cf'(x_0).$$

2) Si ha

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0).$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Si ha } \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \blacksquare \end{aligned}$$

Le affermazioni (1) e (2) del Teor. 2 dicono che *La combinazione lineare di funzioni derivabili è derivabile e la sua derivata è la combinazione lineare delle derivate con gli stessi coefficienti.*

Naturalmente, questi risultati si estendono alla somma e al prodotto di più di due funzioni:

$$D(f + g + h)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) + h'(x_0);$$

$$D(fgh)(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).$$

Derivata della reciproca e del quoziente

TEOREMA 3. Siano date due funzioni $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x_0 \in E$, con $g(x_0) \neq 0$. Allora:

- 1) La funzione $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha $D(\frac{1}{g})(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
- 2) La funzione $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha $D(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

DIM. 1) La g è continua in x_0 ed è $g(x_0) \neq 0$; quindi, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di questo punto in cui è $g(x) \neq 0$. Ora si ha:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \rightarrow -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2) Tenuto conto del risultato precedente e di quello sulla derivata del prodotto, si ha:

$$D(\frac{f}{g})(x_0) = D(f \frac{1}{g})(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \blacksquare$$

Derivata della funzione composta

TEOREMA 4. Siano date due funzioni componibili $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow E'(\subset \mathbb{R})$ e $g: E'(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Siano poi $x_0 \in E$, $u_0 = f(x_0) \in E'$. Se la f è derivabile in x_0 e la g è derivabile in u_0 , allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha $(g \circ f)'(x_0) = g'(u_0)f'(x_0)$.

DIM. Poniamo $y = g(u)$. Il rapporto incrementale della funzione composta può essere scritto nella forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. La prima idea è quella di scrivere

$$(*) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Questa uguaglianza ha senso solo se è $\Delta x \neq 0 \neq \Delta u$. Sappiamo che è $\Delta x \neq 0$, ma può ben accadere che, assegnato $\Delta x (\neq 0)$, si ottenga $\Delta u = 0$; in questo caso, il primo fattore del secondo membro della (*) non ha senso. D'altra parte, sappiamo che la funzione g è derivabile in u_0 ;

possiamo perciò prolungare per continuità la funzione $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ nel punto 0 assegnandole il valore

$g'(u_0)$. La validità della (*) sussiste ora anche se è $\Delta u = 0$, dato che in tal caso è anche $\Delta y = 0$.

A questo punto i giochi sono fatti. In vero, da $\Delta x \rightarrow 0$ segue $\Delta u \rightarrow 0$, per la continuità della f ; inoltre, per il Teorema sul limite delle funzioni composte (Cap. 5, Teor. 16'), si ha

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(\Delta u)}{\Delta u} (\Delta x) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y(\Delta u)}{\Delta u} = g'(u_0). \blacksquare$$

ESEMPIO. 1) La funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = |x|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha $g'(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$. Sia ora data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Dal Teorema precedente si deduce che:

Se f è derivabile in un punto $x_0 \in E$, con $f(x_0) \neq 0$, allora è derivabile in x_0 anche la funzione $|f|$ e si ha: $D(|f|)(x_0) = \frac{|f(x_0)|}{f(x_0)} f'(x_0)$.

(Si tenga presente che in un punto $x_0 \in E$ in cui è $f(x_0) = 0$ la funzione $|f|$ è derivabile se e solo se è $f'(x_0) = 0$.)

Se f è derivabile in un punto $u_0 \in E \setminus \{0\}$, con $u_0 > 0$, e se è $|x_0| = u_0$, con $x_0 \in E$, allora la funzione $f(|x|)$ è derivabile in x_0 e la derivata è data da $f'(u_0) \frac{|x_0|}{x_0}$.

Derivata della funzione inversa

Sussiste il seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 5. Siano I un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e φ la funzione inversa della f . Siano poi x_0 un punto di I e $y_0 = f(x_0)$.

1) Se la f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) \neq 0$, allora la φ è derivabile in y_0 e si ha $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

2) Se la f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) = 0$, allora si ha $\varphi'(y_0) = \infty$. \blacksquare

Il risultato di questo Teorema non è quanto di meglio si possa desiderare; infatti esso afferma che "la derivata della φ in un punto y è data da 1 diviso la derivata della f calcolata in un altro punto x ". La cosa funziona bene se siamo capaci di esprimere x in funzione di y .

ESEMPIO. 2) Sappiamo (Esempio 1, §1) che la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile e che la sua derivata è data da $f'(x) = 2x$. Ristretta la funzione f agli $x \geq 0$, vogliamo determinare la derivata della funzione inversa $\varphi(y) = \sqrt{y}$. Per il Teorema precedente, si ha:

$$D(\sqrt{y}) = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ se } y > 0; \quad \varphi'(0) = +\infty.$$

3) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 + x + 1$. Essa è monotona crescente e derivabile in \mathbb{R} . Scopriremo presto che la sua derivata è data da $f'(x) = 5x^4 + 1$. Per il Teorema precedente, la funzione inversa φ è derivabile e si ha $\varphi'(y) = \frac{1}{5x^4 + 1}$ con $x = \varphi(y)$ o, se più piace, $y = f(x)$. Ma, se è $y = 17$, chi sarà x ? Bisognerebbe saper risolvere l'equazione $x^5 + x + 1 = 17 \dots$

§ 3. DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Vediamo ora in che misura le funzioni elementari sono derivabili e di stabilire le derivate delle singole funzioni, ottenendo la tabella riportata a pg. 133.

Derivata di x^n e di $\sqrt[n]{x}$

Si constata immediatamente che una funzione costante è derivabile su tutto \mathbb{R} e che la sua derivata è la funzione nulla.

Abbiamo altresì visto che anche le funzioni x e x^2 sono derivabili su tutto \mathbb{R} e che le loro derivate sono, rispettivamente, 1 e $2x$.

Cerchiamo ora, più in generale, la derivata della funzione x^n , con $n \geq 2$. Si ha:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^{n-1}.$$

Il rapporto incrementale è dunque dato dalla somma di n addendi ciascuno dei quali, per la continuità della funzione potenza, tende a x_0^{n-1} .

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $D(x^n) = nx^{n-1}$.

Passiamo alla derivata della funzione radice n -ima. Generalizzando quanto visto più su, poniamo $y = \varphi(x) = \sqrt[n]{x}$, da cui $x = y^n$. Si ottiene subito $\varphi'(0) = +\infty$ e inoltre:

$$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{D(y^n)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ per } x > 0 \text{ (anche per } x < 0 \text{ se } n \text{ è dispari)}.$$

La funzione radice è dunque derivabile per $x > 0$ (anche per $x < 0$ se n è dispari) e si ha:

$$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Derivate delle funzioni circolari e delle loro inverse

Cerchiamo la derivata del seno. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{x - x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} = \\ &= \cos x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin \frac{x - x_0}{2} = \cos x_0.\end{aligned}$$

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $D(\sin x) = \cos x$.

Si tenga ben presente che per calcolare la derivata di $\sin x$ si è sfruttato il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ che deve dunque essere calcolato senza far uso delle derivate.}$$

La derivata del coseno si può calcolare in modo analogo, ma si può anche osservare che è

$$D(\cos x) = D(\sin(\pi/2 - x)) = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x.$$

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $D(\cos x) = -\sin x$.

Per la tangente, si ha che, per ogni x reale diverso da $\pi/2 + k\pi$, risulta

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

È dunque: $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Si vede analogamente che, per ogni x reale diverso da $k\pi$ è

$$D(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x.$$

Venendo alle derivate delle funzioni inverse, cominciamo dall'arcseno. Sia dunque $x = \sin y$, con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi $y = \varphi(x) = \arcsin x$, con $x \in [-1, 1]$. Per la (2) del Teor. 5, si ha intanto $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = +\infty$. Tenuto poi conto che, per $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, è $\cos y > 0$, si ha:

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{D(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

È dunque, per $-1 < x < 1$: $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

In modo analogo, si trova la derivata dell'arcocoseno. Posto $x = \cos y$, con $y \in [0, \pi]$, e $y = \cos x$, con $x \in [-1, 1]$ e tenuto conto che, per $y \in]0, \pi[$, è $\sin y > 0$, si ha, per $x \in]-1, 1[$:

$$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il risultato non deve stupire, dato che è $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Per l'arcotangente le cose sono ancora più facili. Siano $x = \operatorname{tg} y$, con $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, e quindi $y = \operatorname{arctg} x$, con $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{tg} y)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

È dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Analogamente si ottiene:

$$D(\operatorname{arcctg} x) = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Derivata dell'esponenziale, del logaritmo e della funzione x^α

Si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

È dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$D(e^x) = e^x.$$

Anche in questo caso si è sfruttato il limite notevole $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, che deve dunque essere calcolato senza far uso delle derivate.

Essendo poi $a^x = e^{x \log a}$, si ottiene

$$D(a^x) = a^x \log a.$$

Veniamo alla derivata del logaritmo. Posto $y = \log x$, con $x > 0$, da cui $x = e^y$, si ha:

$$D(\log x) = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Essendo poi $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$, si ottiene:

$$D(\log x) = \frac{1}{x}; \quad D(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}.$$

Consideriamo, in fine, la funzione $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Si ha:

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \log x}) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

È dunque

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

N.B. Non ci si lasci prendere la mano dall'euforia e si tenga ben presente che la derivata di e^x **non** è $xe^x - 1$.

ESEMPLI. 1) Si ha: $D(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \cos x$; $D(\arcsin(\sqrt{x} - 1)) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x} - 1)^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$D(x^x) = D(e^{x \log x}) = x^x(\log x + 1); \quad D(x \sqrt{\arcsin x}) = \sqrt{\arcsin x} + \frac{x}{2\sqrt{\arcsin x} \sqrt{1 - x^2}};$$

$$D(x e^x \sin x) = e^x \sin x + x e^x \sin x + x e^x \cos x; \quad D(e^{e^x}) = e^{e^x} e^x;$$

$$D(\log_x(x+1)) = D\left(\frac{\log(x+1)}{\log x}\right) = \frac{\frac{\log x}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x}}{\log^2 x};$$

$$D\left(\frac{e^{1/x}}{x^2 - 1}\right) = \frac{-\frac{e^{1/x}(x^2 - 1)}{x^2} - 2xe^{1/x}}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{e^{1/x}(2x^3 + x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 1)^2}.$$

2) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Cerchiamone la derivata. Si ha subito $f'(0) = 0$. Per $x \neq 0$, si ha:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Si vede subito che non esiste il $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Dunque la nostra f è di classe C^0 su \mathbb{R} , ma, pur essendo derivabile, non è di classe C^1 .

Per avere un esempio di funzione di classe C^n , ma non di classe C^{n+1} , basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^{2n+2} \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. (Esercizio!)

Relazione fra i coefficienti di un polinomio e le sue derivate

Consideriamo un polinomio $P(x)$ di grado $n > 0$:

$$(1) \quad P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Fissiamo un punto x_0 . Se interessa studiare la funzione razionale intera rappresentata da $P(x)$ in vicinanza del punto x_0 , è più comodo esprimerla nella variabile $x - x_0$ anziché nella variabile x . Inoltre dato che un addendo del tipo $a_n(x - x_0)^n$ è infinitesimo di ordine n per x che tende a x_0 , conviene ordinare i monomi in ordine crescente rispetto al grado, cioè al contrario di quanto si fa di solito. Si ottiene dunque la scrittura

$$(2) \quad P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Come si fa a passare dalla forma (1) alla forma (2)? Il procedimento più naturale è analogo a quello che si usa nel cambiamento di base dei numeri naturali: si fanno successive divisioni per $x - x_0$. Chiariamo con un esempio.

ESEMPIO. 3) Si ha: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 3 + (x^2 + 4x + 2)(x - 1) =$
 $= 3 + (7 + (x + 5)(x - 1))(x - 1) = 3 + 7(x - 1) + (6 + (x - 1))(x - 1)^2 =$

$$= 3 + 7(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^3.$$

Consideriamo un polinomio $P(x)$ e calcoliamone le derivate. Si ha:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n;$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1};$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \dots + (n-1)na_n(x - x_0)^{n-2};$$

.....

$$P^{(n-1)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)a_{n-1} + 2 \cdot 3 \dots (n-1)na_n(x - x_0);$$

$$P^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Si ottiene:

$$P(x_0) = a_0; \quad P'(x_0) = a_1; \quad P''(x_0) = 2a_2; \quad \dots; \quad P^{(n-1)}(x_0) = (n-1)!a_{n-1}; \quad P^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

È dunque, per ogni intero k , con $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(x_0) = k!a_k$,

ossia:

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (*)$$

Da ciò si ricava, fra l'altro, il seguente

TEOREMA 6. Fissati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e $n+1$ numeri reali $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, esiste uno ed un solo polinomio di grado formale n che soddisfa alle seguenti condizioni (iniziali)

$$P(x_0) = \eta_0; \quad P'(x_0) = \eta_1; \quad \dots; \quad P^{(n)}(x_0) = \eta_n.$$

DIM. Dalla validità della (*), si ha intanto l'unicità. Per l'esistenza, basta osservare che un polinomio che fa al caso è

$$P(x) = \eta_0 + \eta_1(x - x_0) + \frac{\eta_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{\eta_n}{n!}(x - x_0)^n. \blacksquare$$

ESEMPIO. 4) Si ricerchi un polinomio di grado ≤ 4 che soddisfi alle condizioni:

$$P(1) = 2; \quad P'(1) = 0; \quad P''(1) = -1; \quad P'''(1) = 4; \quad P^{(4)}(1) = 1.$$

Il polinomio cercato è dato da

$$P(x) = 2 + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{4}{6}(x - 1)^3 + \frac{1}{24}(x - 1)^4.$$

A questo punto, passare dalla forma (1) alla forma (2) è molto più facile, essendo immediato il calcolo delle derivate di un polinomio.

ESEMPIO. 5) Si voglia esprimere il polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ mediante potenze di $x - 2$. Invece di procedere come nell'Esempio 3, basta osservare che è:

$$P(2) = 17; \quad P'(2) = 22; \quad P''(2) = 18; \quad P'''(2) = 6.$$

Si ottiene:

$$P(x) = 17 + 22(x - 2) + 9(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

§ 4. LE FUNZIONI IPERBOLICHE

Anche le seguenti funzioni elementari di \mathbb{R} in \mathbb{R} , dette funzioni *iperboliche*, sono di notevole importanza:

$$\begin{aligned} \text{il seno iperbolico} \quad \sinh x = \text{Sh}x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \\ \text{il coseno iperbolico} \quad \cosh x = \text{Ch}x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \\ \text{la tangente iperbolica} \quad \text{tgh}x = \text{Th}x &:= \frac{\text{Sh}x}{\text{Ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \\ \text{la cotangente iperbolica} \quad \text{ctgh}x = \text{Cth}x &= \frac{\text{Ch}x}{\text{Sh}x} = \frac{1}{\text{Th}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Il coseno iperbolico è una funzione pari mentre le altre tre sono funzioni dispari. Il seno e il coseno iperbolici hanno, per $x \rightarrow +\infty$, un comportamento asintotico a quello della funzione $\frac{1}{2}e^x$, nel senso che si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Sh}x - \frac{1}{2}e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Ch}x - \frac{1}{2}e^x) = 0$.

Sussiste la seguente identità fondamentale di immediata verifica:

$$\boxed{\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1.}$$

Da questo fatto si deduce che il luogo geometrico dei punti $P(\text{Ch}x, \text{Sh}x)$ è dato dal ramo di iperbole equilatera di equazione $X^2 - Y^2 = 1$, $X > 0$. Ciò spiega il nome di funzioni iperboliche. I nomi di tangente e cotangente derivano dall'analogia con le funzioni circolari.

Le funzioni iperboliche sono ovviamente continue. Esse sono anche derivabili; Infatti, come si constata immediatamente, si ha:

$$\begin{aligned} \boxed{D(\text{Ch}x) = \text{Sh}x}, \quad \boxed{D(\text{Sh}x) = \text{Ch}x}, \\ \boxed{D(\text{Th}x) = \frac{1}{\text{Ch}^2 x} = 1 - \text{Th}^2 x}, \quad \boxed{D(\text{Cth}x) = -\frac{1}{\text{Sh}^2 x} = 1 - \text{Cth}^2 x}. \end{aligned}$$

Posto $y = \text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, si ottiene

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x; \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0; \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Dovendo essere $e^x > 0$, nell'ultima uguaglianza va preso il segno '+'. Dunque la funzione $\text{Sh}x$ è invertibile. La sua funzione inversa è detta *arcoseno iperbolico* ed è indicata con arcsinh . È dunque:

$$\boxed{\text{arcsinh}x := \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).}$$

La funzione $\text{Ch}x$, essendo pari, non è invertibile. Restringiamola agli $x \geq 0$. Procedendo come sopra, da $y = \text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, si ottiene $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Dovendo ora essere $e^x \geq 1$, si ottiene facilmente che nell'ultima uguaglianza va ancora preso il segno '+'. Dunque anche la restrizione della funzione $\text{Ch}x$ agli $x \geq 0$ è invertibile. La sua funzione inversa è detta *arcocoseno iperbolico* ed è indicata con arccosh . È dunque:

$$\boxed{\text{arccosh}x := \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).}$$

Anche la funzione $\text{Th}x$ è invertibile. I soliti conti conducono infatti all'uguaglianza $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$, da cui si ottiene immediatamente l'espressione della funzione *arcotangente iperbolica*. Si ha:

$$\text{arctgh}x := \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Si vede poi immediatamente che anche le funzioni inverse ora definite sono derivabili e si ha, per esempio:

$$D(\text{arcsinh}x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

In conclusione, si ottiene:

$$D(\text{arcsinh}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad D(\text{arccosh}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad D(\text{arctgh}x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Tavola riassuntiva delle derivate

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}x$	$1 + \text{tg}^2x = \frac{1}{\cos^2x}$	$\text{ctg}x$	$-1 - \text{ctg}^2x = \frac{-1}{\sin^2x}$
$\text{arcsin}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arccos}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arcctg}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
e^x	e^x	a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
$\text{Sh}x$	$\text{Ch}x$	$\text{Ch}x$	$\text{Sh}x$
$\text{Th}x$	$1 - \text{Th}x = \frac{1}{\text{Ch}^2x}$	$\text{Cth}x$	$1 - \text{Cth}x = \frac{-1}{\text{Sh}^2x}$
$\text{arcsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arccosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{arctgh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\text{arcctgh}x$	$\frac{1}{x^2-1}$

§ 5. APPROSSIMANTE LINEARE

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto x_0 interno ad E . Si definisce *approssimante lineare della f relativamente ad x_0* (o in x_0) una funzione lineare (ossia razionale intera di grado ≤ 1) $\bar{f}(x) = m(x - x_0) + q$, che soddisfi alle due seguenti condizioni:

- 1) $\bar{f}(x_0) = f(x_0)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{x - x_0} = 0$.

Se la f ammette approssimante lineare in x_0 , si dice che essa è *differenziabile* in x_0 . La *forma lineare* (= polinomio omogeneo di grado ≤ 1) $m(x - x_0)$ è detta *differenziale della f in x_0* .

La (2), che può essere espressa mediante l'uguaglianza

$$f(x) = \bar{f}(x) + \varepsilon(x)(x - x_0), \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

dice che la differenza $f(x) - \bar{f}(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 per $x \rightarrow x_0$.

TEOREMA 7. Una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ammette approssimante lineare in un punto x_0 interno ad E se e solo se f è derivabile in x_0 e si ha

$$\bar{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

DIM. Se la f è derivabile in x_0 , ha senso considerare la funzione razionale \bar{f} definita da $\bar{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Proviamo che questa funzione soddisfa alle condizioni (1) e (2) ed ha quindi il diritto di essere chiamata approssimante lineare della f in x_0 . In effetti si vede subito che è $\bar{f}(x_0) = f(x_0)$. Inoltre si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Per provare il viceversa, supponiamo che la f ammetta in x_0 approssimante lineare $\bar{f}(x) = m(x - x_0) + q$. Dalla (1) si ha immediatamente $q = f(x_0)$. Dalla (2) si ottiene

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right),$$

da cui $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$. Ciò significa che la f è derivabile in x_0 che è $f'(x_0) = m$. ■

Si ha in particolare che, se esiste l'approssimante lineare, esso è unico.

L'approssimante lineare di una funzione f in un punto x_0 del suo dominio è, per definizione, la funzione lineare che meglio approssima la f in un intorno di x_0 .

ESEMPIO. 1) Qual è la retta che meglio approssima la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ in un intorno del punto 2? Questa è, per definizione, l'approssimante lineare della f relativamente al punto 2, cioè la funzione $\bar{f}(x) = e^2(x - 2) + e^2$.

Da un punto di vista geometrico, l'approssimante lineare è la retta tangente di cui abbiamo parlato nel § 1, ma qui la cosa è vista con un'altra ottica e sarà il punto di partenza per un discorso più generale che affronteremo nel §8.

§ 6. PROPRIETÀ LOCALI DEL PRIMO ORDINE

Sono dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ di accumulazione per E . Come dicevamo all'inizio, vogliamo studiare il comportamento della f nei punti vicini a x_0 , sfruttando le nozioni di rapporto incrementale e di derivata. Le prime informazioni le possiamo già ricavare dal segno del rapporto incrementale della f . In vero, affermare che il rapporto incrementale è positivo [negativo] significa dire che gli incrementi Δf e Δx hanno lo stesso segno [hanno segno opposto].

Ma il fatto che la funzione rapporto incrementale abbia sempre lo stesso segno è una cosa abbastanza rara. Consideriamo, per esempio, la funzione seno, con $x_0 = 0$. Si vede subito che il rapporto incrementale, che è dato dall'espressione $\frac{\sin x}{x}$ non ha segno costante. Se però riduciamo le nostre pretese ai punti dell'intervallo $]-\pi, \pi[$ privato dello 0, si scopre che effettivamente il rapporto incrementale è sempre positivo.

Ciò ci induce, passando al caso generale, a richiedere che certe proprietà della funzione, quali appunto quella di avere il rapporto incrementale di segno costante, siano soddisfatte non per tutti gli $x \in E \setminus \{x_0\}$, ma soltanto per quelli appartenenti ad un opportuno intorno di x_0 . Esprimeremo questo fatto dicendo che quelle che stiamo studiando sono *proprietà locali* delle funzioni.

DEFINIZIONE. Sono dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$.

Si dice che la f è *crescente in* x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap E$, si ha che

$$\text{da } x < x_0 \text{ segue } f(x) < f(x_0) \text{ e da } x > x_0 \text{ segue } f(x) > f(x_0).$$

Si dice che la f è *decrecente in* x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap E$, si ha che

$$\text{da } x < x_0 \text{ segue } f(x) > f(x_0) \text{ e da } x > x_0 \text{ segue } f(x) < f(x_0).$$

Si dice che x_0 è *punto di massimo (relativo)* per la f se esiste un intorno U di x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) < f(x_0)$.

Si dice che x_0 è *punto di minimo (relativo)* per la f se esiste un intorno U di x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > f(x_0)$.

Si dice che x_0 è *punto di massimo [minimo] (relativo) in senso debole* per la f se esiste un intorno U di x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$].

ESEMPLI. 1) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} - x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è crescente

in 0, dato che si ha $f(x) < 0 = f(0)$ per $-1 < x < 0$ e $f(x) > 0 = f(0)$ per $0 < x < 1$. E ciò anche se la funzione ristretta agli $x < 0$ [agli $x > 0$] è decrecente.

2) Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Nel punto 0 la

funzione non è né crescente né decrecente e non ha né massimo né minimo, nemmeno in senso debole.

3) Una funzione costante definita su un intervallo non è né crescente né decrecente in alcun punto e non ha né punti di massimo relativo né punti di minimo relativo; ogni punto del dominio è sia di massimo relativo in senso debole che di minimo relativo in senso debole.

Analogamente, per la funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} che vale 1 se è $x \in \mathbb{Q}$ e 0 se è $x \notin \mathbb{Q}$, ogni $x \in \mathbb{Q}$ è di massimo relativo in senso debole e ogni $x \notin \mathbb{Q}$ è di minimo relativo in senso debole.

4) Consideriamo ancora la funzione seno. Tutti i punti del tipo $\pi/2 + 2k\pi$ sono di massimo relativo; tutti i punti del tipo $-\pi/2 + 2k\pi$ sono di minimo relativo; la funzione è crescente, per esempio, in ogni punto del tipo $2k\pi$ o del tipo $\pi/4 + 2k\pi$, mentre è decrescente in ogni punto del tipo $3\pi/4 + 2k\pi$.

È immediato constatare che se una funzione è monotona crescente [decrescente], allora è crescente [decrescente] in ogni punto del suo dominio. La funzione $\operatorname{tg} x$ mostra che non sussiste l'implicazione opposta. Infatti essa è, come subito si vede, crescente in ogni punto del suo dominio ma, essendo periodica, non è monotona.

È anche interessante osservare che una funzione può essere continua e crescente in un punto x_0 del suo dominio senza che, per questo, risulti monotona in tutto un intorno di x_0 , come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO. 5) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Essa è crescente in 0. Si vede poi facilmente che non esiste nessun intorno dello 0 in cui la f è monotona crescente.

A tale riguardo sussiste il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 8. Se una funzione $f: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente [decrescente] in ogni punto di un intervallo I , allora essa è monotona crescente [decrescente] in I . ■

È di estrema importanza il seguente

TEOREMA 9. 1) Se una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ha in un punto $x_0 \in E$ derivata positiva (finita o no), allora la f è crescente in x_0 .

2) Se una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ha in un punto $x_0 \in E$ derivata negativa (finita o no), allora la f è decrescente in x_0 .

3) Se una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente in un punto $x_0 \in E$ ed esiste $f'(x_0)$, allora si ha $f'(x_0) \geq 0$.

4) Se una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente in un punto $x_0 \in E$ ed esiste $f'(x_0)$, allora si ha $f'(x_0) \leq 0$.

DIM. 1) Sia dunque $f'(x_0) > 0$. Ciò significa che è $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 in cui la funzione rapporto incrementale è positiva. La f è dunque crescente in x_0 . La (2) si prova in modo perfettamente analogo.

3) Se fosse $f'(x_0) < 0$, la f sarebbe decrescente in x_0 ; dato che ciò non può essere, si deduce che è $f'(x_0) \geq 0$. La (4) si prova in modo perfettamente analogo alla (3). ■

N.B. Può accadere che la f sia crescente [decrescente] in $x_0 \in E$ e che sia $f'(x_0) = 0$.

ESEMPIO. 6) Basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$, con $x_0 = 0$. Si ha $f'(0) = 0$, ma la f è crescente in 0, dato che è $x^3 < 0$ per $x < 0$ e $x^3 > 0$ per $x > 0$.

TEOREMA 10. (di Fermat) - Se una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 interno ad E che sia di massimo o di minimo relativo (anche in senso debole), allora si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$.

DIM. Sia x_0 un punto di massimo relativo (anche in senso debole) interno ad E . Esiste dunque un intorno U di x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

Prima dimostrazione. Supponiamo $f'(x_0) > 0$; la f è dunque crescente in x_0 . Dato che x_0 è interno ad E , esiste un intorno destro V di x_0 tale che da $x \in V \cap E \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) > f(x_0)$. Essendo $U \cap V \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, si ottiene una contraddizione. Analogamente se è $f'(x_0) < 0$; in questo caso, la contraddizione si ha in un intorno sinistro di x_0 .

Seconda dimostrazione. Sia $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$. Se è $x < x_0$, si ha $R_{x_0}^f(x) \geq 0$, da cui $f'(x_0^-) \geq 0$; se è $x > x_0$, si ha $R_{x_0}^f(x) \leq 0$, da cui $f'(x_0^+) \leq 0$. Siccome la f è derivabile in x_0 , l'unica possibilità è dunque che sia $f'(x_0) = 0$. ■

Facciamo alcune osservazioni importanti.

Può accadere che in un punto di massimo o minimo interno la f non abbia derivata. basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$; lo 0 è punto di minimo, ma non esiste $f'(0)$.

Se x_0 è un punto di massimo relativo non interno ad E , con la f derivabile in x_0 , può accadere che sia $f'(x_0) \neq 0$.

ESEMPIO. 7) Basta considerare la funzione $f: I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo e il punto $x_1 = 1$ è di massimo; ciononostante, si ha $f'(0) = f'(1) = 1$.

Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo interno ad E , può accadere che la f abbia derivata infinita in x_0 ma, ovviamente, non può essere né $f'(x_0) = +\infty$, né $f'(x_0) = -\infty$.

ESEMPIO. 8) Basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo e si ha $f'(0) = \infty$.

TEOREMA 4. Siano $I = [a, c]$, b un punto interno ad I ed $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in $I \setminus \{b\}$.

1) Se è: $f'(x) > 0$ in $]a, b[$ e $f'(x) < 0$ in $]b, c[$, allora b è punto di massimo relativo per la f .

2) Se è: $f'(x) < 0$ in $]a, b[$ e $f'(x) > 0$ in $]b, c[$, allora b è punto di minimo relativo per la f .

DIM. 1) La f è crescente in ogni punto di $]a, b[$ ed è quindi monotona crescente su tale intervallo. Dalla continuità della f in b e dal Teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha $f(b) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{f(x): a < x < b\}$. È dunque $f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in]a, b[$. Risulta poi che, per ogni $x \in]a, b[$, è $f(x) < f(b)$, ancora per la crescenza della f . Allo stesso modo si prova che è $f(x) < f(b)$ per ogni $x \in]b, c[$.

La (2) si prova in modo perfettamente analogo. ■

Possiamo ora affrontare i primi studi di funzione.

ESEMPI. 9) Studio della funzione $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x^2}$.

– *Dominio e segni:* $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f(x) > 0$ se e solo se è $|x| < 1$; $f(0) = 1$.

– *Limiti:* $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

– *Segno di $f(x)$ - (-1):* $f(x) > -1$ se e solo se è $(x < -2) \vee (-1 < x < 1)$.

– *Derivata prima:* $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(1 - x^2)^2}$.

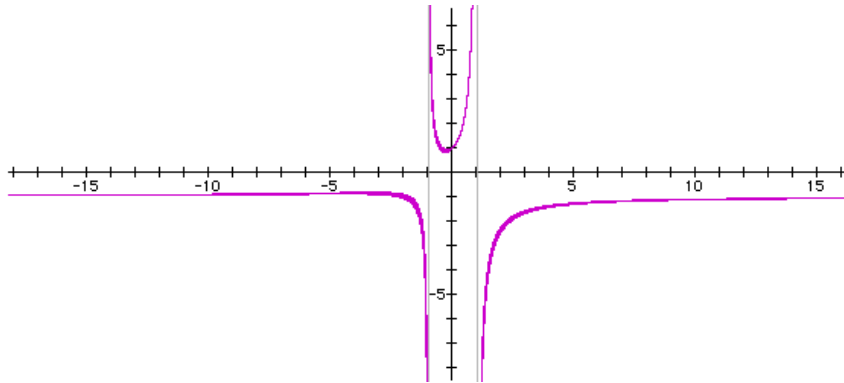
– *Segno di f' ed estremi di f :* $f'(x) > 0$ se e solo se è $(x < -2 - \sqrt{3}) \vee (-2 + \sqrt{3} < x \neq 1)$.

$x_1 = -2 - \sqrt{3}$ è punto di massimo relativo; $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ è di minimo relativo;

$\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.

– Limiti di $f'(x)$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



10) Studio della funzione $f(x) = \sin x \cos 2x$.

– Dominio e simmetrie: $E = \mathbb{R}$. La f è periodica di periodo 2π e dispari. Studiamola in $[0, \pi]$.

– Segni: Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se è $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \vee (\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi)$.

– Derivata prima: $f'(x) = \cos x (1 - 6\sin^2 x)$.

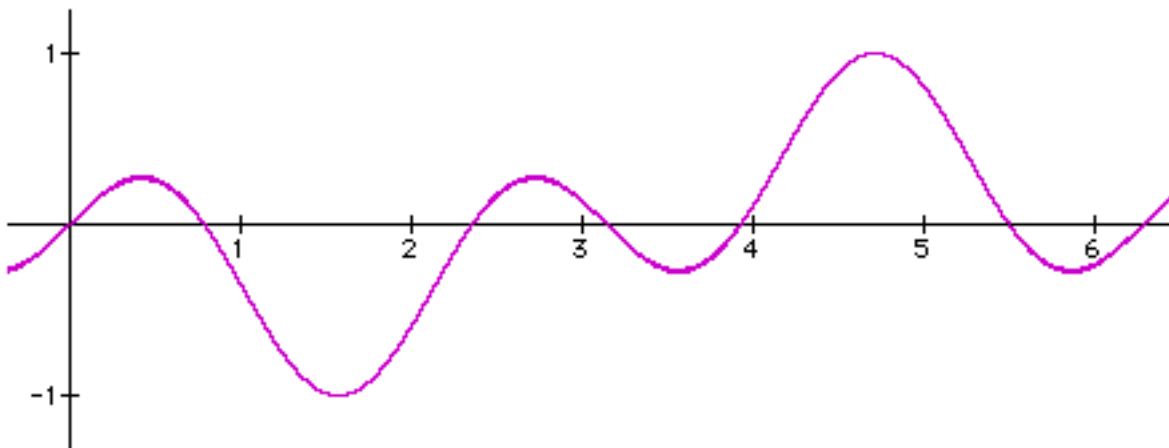
– Segno di f' ed estremi di f : $f'(x) > 0$ se e solo se è $(x < x_1) \vee (\frac{\pi}{2} < x < x_2)$,

con $x_1 = \arcsin \sqrt{1/6}$ e $x_2 = \pi - x_1$.

x_1 e x_2 sono punto di massimo relativo; $x_3 = \pi/2$ è punto di minimo relativo;

$\min f = f(\pi/2) = -1$; $\max f = f(3\pi/2) = 1$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



11) Studio della funzione $f(x) = \frac{1}{5}(2 - x^2)e^{1+x}$.

– Dominio e segni: $E = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se e solo se è $|x| < \sqrt{2}$; $f(0) = (2/5)e$.

– Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

– Derivata prima: $f'(x) = -(1/5)(x^2 + 2x - 2)e^{1+x}$.

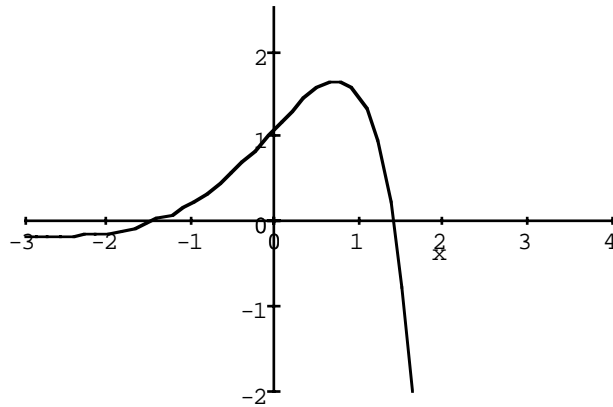
– Segno di f' ed estremi di f : $f'(x) > 0$ se e solo se è $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$.

$x_1 = -1 - \sqrt{3}$ punto di minimo relativo; $x_2 = -1 + \sqrt{3}$ punto di massimo relativo;

$\inf f = -\infty$; $\max f = f(x_2)$.

– Limiti di $f'(x)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione



Asintoti

Abbiamo detto a suo tempo che la funzione seno iperbolico ha un comportamento asintotico con la funzione $\frac{1}{2}e^x$, per $x \rightarrow +\infty$, dato che è $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Sh } x - \frac{1}{2}e^x) = 0$; lo stesso per la funzione $\text{Ch } x$. In generale, si dà la seguente

DEFINIZIONE. Date due funzioni continue $f, g: I = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ [oppure $I =]-\infty, a]$] sono *asintotiche* per $x \rightarrow +\infty$ [per $x \rightarrow -\infty$] se è

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0; \quad [\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0].$$

In particolare, se è $g(x) = mx + q$, si dice che la retta $y = mx + q$ è un *asintoto* per la f .

TEOREMA 12. Sia $f: I = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g(x) = mx + q$. La g è asintoto per la f se e solo se sono soddisfatte le due condizioni:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q.$$

DIM. Si ha ovviamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0$ se e solo se è $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$. Ciò prova, in particolare, il "se". Per provare il "solo se", basta mostrare che dalla (*) segue la (1). Scritta la (*) nella forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right) = 0$, si ottiene che deve essere $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, dato che è $\frac{q}{x} \rightarrow 0$. ■

ESEMPLI. 12) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + x$. Si ha $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \infty$; non esiste asintoto.

13) Consideriamo la funzione $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \log x$. Si ha $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ e $f(x) - x \rightarrow +\infty$; non esiste asintoto.

14) Consideriamo la funzione $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(e^x + x)$. Essendo $f(x) = x + \log(1 + xe^{-x})$, si ha immediatamente che la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \rightarrow +\infty$.

15) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Si ha subito $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$: la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \rightarrow \infty$.

16) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x}$. Si ha immediatamente $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$: la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \rightarrow \infty$.

Si noti che per le funzioni degli Esempi 14 e 15, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, mentre per la funzione dell'Esempio 16, che pure ammette asintoto, non esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$. La cosa verrà chiarita nel prossimo paragrafo.

§ 7.- FUNZIONI DERIVABILI SU UN INTERVALLO

TEOREMA 13. (di Rolle) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se la f è derivabile in $]a, b[$, continua anche in a e b e se è $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

DIM. Se la f è costante, si ha $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Supponiamo dunque la f non costante. Essendo la f continua in $[a, b]$ che è un insieme chiuso e limitato, possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. La f assume dunque un valore minimo m ed uno massimo M . Essendo inoltre $m < M$, dato che la f non è costante, al più uno di questi due valori può coincidere con $f(a) = f(b)$. Ne viene che o il minimo m o il massimo M deve essere assunto in un punto ξ interno ad I . Per il Teorema di Fermat, si ha $f'(\xi) = 0$. ■

È importante rendersi conto che tutte le ipotesi fatte sono essenziali per la validità del teorema. Constatiamolo mediante esempi.

ESEMPLI. 1) Sia $f: E = [0, \pi] \setminus \{\pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan x$. La f è derivabile in E , si ha $f(0) = f(\pi) = 0$, ma E non è un intervallo. La derivata non si annulla mai.

2) Sia $f: I = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$. La f è definita e continua su un intervallo, si ha $f(-1) = f(1) = 1$, ma la f non è derivabile in tutti i punti di $] -1, 1[$. La derivata non si annulla mai.

3) Sia $f: I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - [x]$. (Si ha cioè $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$.) La f è definita su un intervallo, derivabile nei punti interni e si ha $f(0) = f(1) = 0$, ma la f non è continua in 1. La derivata non si annulla mai.

4) Sia $f: I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. La f è definita e derivabile su un intervallo, ma si ha $f(0) \neq f(1)$. La derivata non si annulla mai.

5) Ciò non significa che se una funzione derivabile non soddisfa a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle debba avere la derivata sempre diversa da 0. Basta considerare la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 0$ e $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$.

TEOREMA 8. (di Cauchy) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e due funzioni f, g di I in \mathbb{R} . Se f e g sono derivabili in $]a, b[$ e continue anche in a e b , allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che

$$(*) \quad [f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

Se poi è $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, la (*) può essere scritta nella forma

$$(**) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

DIM. Consideriamo la funzione $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

La φ è continua in I , dato che è combinazione lineare di funzioni continue in I ed è derivabile in $]a, b[$ perché combinazione lineare di funzioni derivabili in $]a, b[$. Inoltre si ha

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = \varphi(b).$$

La φ soddisfa dunque a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle. Esiste perciò almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $\varphi'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0$.

Supponiamo ora che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Deve essere anche $g(b) \neq g(a)$, dato che, in caso contrario, la g soddisferebbe a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle e la sua derivata dovrebbe annullarsi in almeno un punto interno ad I , contro l'ipotesi. A questo punto, per avere la (**) basta dividere ambo i membri della (*) per $[g(b) - g(a)]g'(\xi) (\neq 0)$. ■

Un caso particolare molto importante del Teorema di Cauchy si ottiene ponendo $g(x) = x$.

TEOREMA 15. (di Lagrange) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e una funzione f di I in \mathbb{R} . Se la f è derivabile in $]a, b[$ e continua anche in a e b , allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad \blacksquare$$

Da un punto di vista geometrico, il Teorema di Lagrange dice che data una funzione f continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nei punti interni, esiste almeno un punto interno ad I in cui la retta tangente è parallela alla secante per $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

ESEMPIO. 6) Sia data la funzione $f: i = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Si chiede di determinare i parametri reali a e b in modo che alla f sia applicabile il Teorema di Lagrange e di determinare i punti di Lagrange.

Affinché la f sia continua anche nel punto 0 deve essere

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b.$$

È dunque $\boxed{b = 1}$. Si ha poi

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2x + a, & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

E inoltre $f'(0^-) = 1$; $f'(0^+) = a$.

La f è derivabile in 0 se e solo se è $a = 1$.

Applicando il Teorema di Lagrange, si ha

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{e - 1}{2} = f'(\xi).$$

Cerchiamo intanto gli $\xi \in]-1, 0]$. Si ha $e^\xi = \frac{e-1}{2} \in]0, 1[$, da cui $\xi = \log \frac{e-1}{2} \in]-1, 0]$.

Cerchiamo poi gli $\xi \in [0, 1[$. Si ha $\frac{e-1}{2} = 2\xi + 1$, da cui $\xi = \frac{e-3}{4} \notin [0, 1[$.

C'è dunque un unico punto di Lagrange: $\xi = \log \frac{e-1}{2}$.

Formula del valor medio. Siano f una funzione derivabile in un intervallo I ed x_0 un punto di I . Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ sussiste la seguente *formula dal valor medio*, che si ricava immediatamente dall'uguaglianza espressa dal Teorema di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi), \text{ con } \xi \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0.$$

ESEMPIO. 7) Si voglia dare un valore approssimato del numero $\log 3$. Sappiamo che è $\log e = 1$. Dalla formula del valor medio si ottiene

$$\log 3 = \log e + (3 - e) \frac{1}{\xi}.$$

Essendo $e < \xi < 3$, si ottiene

$$1 + \frac{3-e}{3} < \log 3 < 1 + \frac{3-e}{e},$$

da cui, essendo $2,718 < e < 2,719$,

$$1,093 < 2 - \frac{2,719}{3} < 1 + \frac{3-e}{3} < \log 3 < 1 + \frac{3-e}{e} < \frac{3}{2,718} < 1,104.$$

(In realtà è $\log 3 = 1,0986\dots$)

Vediamo ora alcune importanti conseguenze del Teorema di Lagrange.

COROLLARIO 16. 1) Siano dati un intervallo I e una funzione f di I in \mathbb{R} . Se la f è derivabile in I ed è $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora la f è costante in I .

2) Siano dati un intervallo I e due funzioni f e g di I in \mathbb{R} . Se f e g sono derivabili in I ed è $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esiste una costante reale c tale che, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = g(x) + c$.

3) Siano dati un intervallo I e una funzione f di I in \mathbb{R} . Se la f è derivabile in I , ed è $f'(x) > 0$ [< 0] per ogni x interno ad I , allora la f è monotona crescente [decrecente] in I .

DIM. 1) Fissiamo un punto $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$, si ha, per il Teorema di Lagrange,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) = 0,$$

da cui $f(x) = f(x_0)$.

2) Consideriamo la funzione $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - g(x)$. Si ha $h'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Per la (1), esiste una costante reale c tale da aversi $h(x) = c$ per ogni $x \in I$.

3) Quali che siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, esiste, per il Teorema di Lagrange, un punto ξ , con $x_1 < \xi < x_2$, tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0,$$

da cui $f(x_1) < f(x_2)$. ■

Se il dominio non è un intervallo, le precedenti affermazioni possono risultare false.

ESEMPLI. 8) La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ha la derivata identicamente nulla, ma non è costante.

9) Le funzioni $f, g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = \log(|x|)$ e $g(x) = \log(|x|) + \frac{|x|}{x}$ hanno la medesima derivata, ma non differiscono per una costante.

10) La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha la derivata positiva in ogni punto del suo dominio, ma non è ivi crescente.

TEOREMA 17. (1° Teorema di de l'Hospital) - Siano dati un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di α e due funzioni $f, g: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$. Si supponga inoltre che f e g siano infinitesime per x che tende ad α , derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni x , ed esista il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, allora esiste ed è uguale a β anche il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$.

DIM. Limitiamoci al caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$. È lecito supporre che U sia un intervallo. Prolunghiamo per continuità le due funzioni in x_0 , ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, le restrizioni della f e della g all'intervallo di estremi x e x_0 soddisfano a tutte le ipotesi del Teorema di Cauchy. Per ogni siffatto x , sia $\xi(x)$ uno dei punti di Cauchy. Si ha dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Al tendere di x a x_0 , anche $\xi(x)$ tende a x_0 ed è sempre $\xi(x) \neq x_0$. Per il Teorema sul limite delle funzioni composte, si ha dunque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \beta$. È dunque anche $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$. ■

Sussiste anche il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 18. (2° Teorema di de l'Hospital) - Siano dati un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di α e due funzioni $f, g: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$. Si supponga inoltre che f e g siano infinite per x che tende ad α , derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni x , ed esista il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, allora esiste ed è uguale a β anche il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$. ■

Il primo Teorema di de l'Hospital sarà indicato come *caso* $0/0$, il secondo come *caso* ∞/∞ .

I Teoremi di de l'Hospital forniscono delle condizioni *sufficienti* per l'esistenza del limite del rapporto di due funzioni entrambe infinitesime o entrambe infinite. Tale condizione non è però necessaria. Può cioè accadere che esista il limite di f/g ma non quello di f'/g' . Per esprimere questo fatto, scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

ESEMPIO. 11) Si ha immediatamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = 1$. Per contro, non esiste il limite del rapporto delle derivate $\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$.

Può anche accadere che esistano sia il limite di f/g sia quello di f'/g' , ma che ciò non ci aiuti affatto. In effetti, a priori, non è per nulla chiaro perché debba essere più facile ricercare il limite di f'/g' piuttosto che quello di f/g ; torneremo su questo problema tra poco.

ESEMPIO. 12) Si voglia ricercare il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$. Applicando l'Hospital, si passa dal problema dato a quello di ricercare il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, che è perfettamente equivalente a quello di partenza. Per contro si ha immediatamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = 1.$$

Assodato che i Teoremi di de l'Hospital non forniscono la bacchetta magica per risolvere tutti i problemi sulla ricerca dei limiti, vediamo alcuni esempi sul loro utilizzo.

ESEMPLI. 13) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$.

14) Si ha:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^2(1 - \cos x)} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^4} \Leftarrow 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2x}{4x^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

15) Ma si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{1 - \cos x} \right) = -1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

16) Si ha:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sin x - \log x}{x^2} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \Leftarrow - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \text{ Si ha: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} + \sqrt[4]{x^4 - x^3}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt[3]{1 - 1/x} - x\sqrt[4]{1 - 1/x}) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-t} - \sqrt[4]{1-t}}{t} \Leftarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-t)^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(1-t)^3}} \right) = -\frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

Perché funziona la regola di de l'Hospital? Ricordando che è $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, si intuisce che

La derivazione abbassa di una unità gli ordini di infinitesimo per x che tende a x_0 e gli ordini di infinito per x che tende a infinito, mentre innalza di una unità gli ordini di infinito per x che tende a x_0 e gli ordini di infinitesimo per x che tende a infinito.

Constatiamo questo fatto nel caso molto particolare che sia $f: U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesima per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, derivabile ed esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. È dunque $\text{ord}_{x_0} f' = n$. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \Leftarrow \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{l}{n+1}.$$

Ciò prova che è $\text{ord}_{x_0} f = n + 1$.

Da questo fatto si ricava che in generale, a parità di altre condizioni, l'Hospital funziona meglio nel caso $0/0$ per $x \rightarrow x_0$ e nel caso ∞/∞ per $x \rightarrow \infty$.

Ritorniamo brevemente a quanto osservato alla fine del § 6. Sia $f: I = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e infinita per $x \rightarrow +\infty$. Volendo ricercare se la f ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$, si comincia con l'indagare se esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Ora, applicando l'Hospital, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x).$$

Ciò spiega perché, per determinare il valore del coefficiente m si può ricercare il limite di $f'(x)$ anziché quello di $\frac{f(x)}{x}$. L'Esempio 16 del § 6 mostra che però può esistere asintoto senza che esista il limite della derivata.

Chiudiamo il paragrafo con un'interessante conseguenza del Teorema di de l'Hospital

TEOREMA 19. (Teorema sul limite della derivata) - Siano dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di x_0 e una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Si supponga inoltre che f sia derivabile in $U \setminus \{x_0\}$, continua anche in x_0 ed esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \beta$. Allora esiste anche la derivata della f in x_0 e si ha $f'(x_0) = \beta$.

DIM. Si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \beta$. ■

ESEMPIO. 18) Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^x$. Si può prolungare la f per continuità anche in 0, ponendo $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x^x$. Per $x > 0$, si ha $f'(x) = x^x(\log x - 1)$. Essendo $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$, si conclude che è anche $f'(0) = -\infty$.

Si tenga ben presente che, senza l'ipotesi della continuità della f in x_0 , la tesi del teorema può cadere in difetto.

ESEMPIO. 19) Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

La f non è continua in 0. Ora si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, mentre risulta $f'(0) = +\infty$.

§ 8. LA FORMULA DI TAYLOR

Il problema che affronteremo in questo paragrafo è quello dell'approssimazione di funzioni mediante polinomi. In realtà ci sono almeno due problemi diversi che si presentano al riguardo:

– *Approssimazione globale.* Data una funzione $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si cerca in una determinata classe di funzioni 'semplici', per esempio quella dei polinomi, una funzione ϕ che in alcuni punti di I abbia gli stessi valori della f e in modo che sia soddisfatta una maggiorazione, fissata a priori, dell'errore commesso; si chiede cioè che, per ogni $x \in I$, $|f(x) - \phi(x)|$ risulti minore di un prefissato $\sigma > 0$.

– *Approssimazione locale.* Dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di x_0 e una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, si cerca in una determinata classe di funzioni 'semplici', che per noi sarà quella dei polinomi, una funzione ϕ tale che la differenza $|f(x) - \phi(x)|$ sia, per $x \rightarrow x_0$ infinitesima di ordine maggiore di un prefissato n .

Noi ci occuperemo esclusivamente di quest'ultimo problema.

Cominciamo con lo stabilire due importanti risultati preliminari.

TEOREMA 20. (*Lemma di Peano*) - Siano dati un intervallo I , un punto $x_0 \in I$ e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, infinitesima per $x \rightarrow x_0$, n volte derivabile in I , con

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

DIM. Sia $g(x) = (x - x_0)^n$. La funzione g è di classe C^∞ e si ha

$$g^{(k)}(x) = (n)_k (x - x_0)^{n-k}, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n.$$

È dunque

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Le coppie di funzioni $(f(x), g(x)), (f'(x), g'(x)), \dots, (f^{(n-1)}(x), g^{(n-1)}(x))$ soddisfano alle ipotesi del Teorema di Cauchy. Esistono dunque $n - 1$ punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, tali che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} =$$

$$= \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}.$$

Essendo ξ_{n-1} compreso fra x e x_0 , si ha che, al tendere di x a x_0 , anche ξ_{n-1} tende a x_0 ed è, per il Teorema di Cauchy, sempre diverso da x_0 . L'ultimo membro delle uguaglianze sopra scritte non è altro che il rapporto incrementale della funzione $f^{(n-1)}(x)$ diviso per $n!$ e, pertanto, tende a $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. ■

Il risultato di questo Teorema si può anche esprimere con l'uguaglianza

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \beta(x), \quad \text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0.$$

Dal Lemma di Peano segue subito il seguente risultato utile per la determinazione degli ordini di infinitesimo:

COROLLARIO 21. Siano dati un intervallo I , un punto $x_0 \in I$ e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, infinitesima per $x \rightarrow x_0$, n volte derivabile in I . Allora si ha $\text{ord}_{x_0} f = n$ se e solo se è

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad \blacksquare$$

ESEMPIO. 1) La funzione $f(x) = x - \sin(e^x - 1)$ è infinitesima per $x \rightarrow 0$. Si constata facilmente che è

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1,$$

si conclude che è $\text{ord}_0 f(x) = 2$.

TEOREMA 22. (Lemma di Lagrange) - Siano dati un intervallo I , un punto $x_0 \in I$ e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, infinitesima per $x \rightarrow x_0$, n volte derivabile in I , con

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

allora esiste un punto ξ compreso fra x e x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

DIM. Procedendo come si è fatto per provare il Lemma di Peano, si ottiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0) - 0} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto x_0 interno ad I . Si definisce *polinomio approssimante n -imo della f relativamente ad x_0* un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ che soddisfi alle due seguenti condizioni:

- 1) $P_n(x_0) = f(x_0)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Per $n = 1$, si ha l'approssimante lineare studiato nel § 5. Stabiliamo ora un fondamentale risultato che dà una condizione sufficiente per l'esistenza del polinomio approssimante n -imo.

TEOREMA 23. (di Taylor) - Siano dati un intervallo I , un punto x_0 interno ad I e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, n volte derivabile in I . Allora esiste ed è unico il polinomio approssimante n -imo $P_n(x)$ relativo al punto x_0 .

DIM. Supponiamo intanto che esista un polinomio P_n soddisfacente alle condizioni (1) e (2), definito da

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Sia poi $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Dovendo essere, per la (2), $\text{ord}_{x_0} \varphi > n$, si ottiene dal Corollario 21 che deve essere

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0,$$

da cui si ricava

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0) = a_k k!, \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n.$$

Dunque, se un siffatto polinomio P_n esiste, esso è unico ed è definito da

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Resta solo da provare che questo polinomio soddisfa alle condizioni (1) e (2) ed ha quindi diritto di essere chiamato polinomio approssimante n -imo. La (1) è immediata e così la (2), dato che la funzione $\varphi = f - P_n$ si annulla in x_0 assieme alle sue prime n derivate ed è quindi infinitesima in x_0 di ordine maggiore di n . ■

Si noti che il Teorema di Taylor fornisce, nel caso $n > 1$, solo una condizione sufficiente per l'esistenza del polinomio approssimante n -imo, come ora vedremo.

ESEMPLI. 2) Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^3, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Si vede subito che, relativamente al punto $x_0 = 0$, esiste il polinomio P_2 e che questo è il polinomio nullo. È poi immediato che non può esistere in 0 la derivata seconda.

3) Qual è la parabola che meglio approssima la funzione esponenziale in un intorno del punto 1? Essa è espressa dal polinomio P_2 definito da $P_2(x) = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2$.

Sostituendo $f(x)$ con $P_n(x)$, si commette un errore espresso da una funzione *resto* infinitesima di ordine maggiore di n per $x \rightarrow x_0$. Come si può valutare questo errore? Risolviamo il problema sotto l'ipotesi ulteriore che la f sia $n + 1$ volte derivabile in I .

TEOREMA 24. (Formula di Taylor - Lagrange) - Siano dati un intervallo I , un punto x_0 interno ad I e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ volte derivabile in I , allora esiste un punto ξ compreso fra x e x_0 tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

DIM. La funzione $\varphi = f - P_n$ è $n + 1$ volte derivabile in I e soddisfa alle ipotesi del Lemma di Lafrange. Applicando questo teorema, si ottiene:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

dato che è $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$. Basta poi ricavare $f(x)$. ■

Indicheremo con $T_{n+1}(x)$ il resto $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, (detto *resto di Lagrange*) che è un infinitesimo di ordine $\geq n + 1$ per $x \rightarrow x_0$.

A questo punto è facile scrivere le formule di Taylor - Lagrange per alcune funzioni elementari con punto iniziale $x_0 = 0$.

$f(x)$	$P_n(x)$	$ T_{n+1}(x) $
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$	$\frac{ x ^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \xi $
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$	$\frac{ x ^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos \xi $
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$	$\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$
$\text{Sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$	$\frac{ x ^{2m+1}}{(2m+1)!} \text{Ch} \xi$
$\text{Ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}$	$\frac{ x ^{2m+2}}{(2m+2)!} \text{Ch} \xi$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n$	$\binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x ^{n+1}$

Vediamo adesso di calcolare il polinomio P_{2n+1} della funzione $f(x) = \arctg x$.

È $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ora si ha

$$\frac{(1-x^{2n+2}) + x^{2n+2}}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad \text{con } \text{ord}_0 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} = 2n+2.$$

È ora immediato osservare che una funzione che ha $Q_{2n}(x)$ come derivata è data da

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Proviamo che quello ora trovato è effettivamente il polinomio approssimante di grado $2n + 1$. Infatti, posto

$$\beta(x) = \operatorname{arctg} x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right),$$

si ha

$$|\beta'(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^3 + \dots + (-1)^n x^{2n}) \right| = \frac{x^{2n+2}}{1+x^2},$$

che è un infinitesimo di ordine $2n + 2 > 2n$, da cui $\operatorname{ord} \beta(x) > 2n + 1$. Si ha dunque

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_{2n+3}.$$

Con ragionamenti simili si trova la formula di Taylor dell'arcoseno. (Si parte dal fatto che la derivata dell'arcoseno è $(1-x^2)^{-1/2}$. Risulta

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_{2n+3}.$$

Vediamo ora, con qualche esempio come si possano utilizzare queste formule. Ricordiamo, intanto, che l'espressione "*n cifre decimali esatte*" significa che l'errore commesso è minore di $5 \cdot 10^{-(n+1)}$.

ESEMPLI. 4) Se per calcolare $\sin \frac{1}{10}$ utilizziamo $P_5 = P_6$, che errore commettiamo? Si ha:

$$|T_7(\frac{1}{10})| = \frac{(1/10)^7}{7!} \cos \xi < \frac{1}{5040 \cdot 10^7} < \frac{1}{5 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^{-11}.$$

Posto

$$\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000} \approx$$

$$\approx 0,1 - 0,000.166.666.67 + 0,000.000.083.33 = 0,099.833.416.67,$$

si hanno dunque almeno 10 cifre decimali esatte.

5) Calcolare $\sqrt[10]{e}$ con almeno 6 cifre decimali esatte. Essendo

$$|T_{n+1}(\frac{1}{10})| = \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi < \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} e < \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} 3,$$

basta cercare un n per cui sia $\frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} 3 < 5 \cdot 10^{-7}$. Ciò equivale a $3 \cdot 10^7 < 5(n+1)! \cdot 10^{n+1}$.

Si vede facilmente che basta prendere $n = 4$. (Abbiamo maggiorato e^ξ con 3; in realtà avremmo potuto maggiorare e^ξ con 1,2). Dunque le prime 6 cifre decimali esatte di $\sqrt[10]{e}$ sono date da

$$P_4(\frac{1}{10}) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{240.000} \approx$$

$$\approx 1 + 0,1 + 0,005 + 0,00.166.7 + 0,000.004.2 \approx 1,105.171.$$

6) Si vuole approssimare $\log(1+x)$ con $P_5(x)$ in modo da commettere un errore inferiore a 0,003 per $|x| < h$. Qual è un possibile valore di h ? Vogliamo dunque che, per ogni x , con $|x| < h$, risulti $|T_6(x)| < 0,003$. Deve naturalmente essere $h < 1$. Si ha

$$|T_6(x)| < \frac{h^6}{6(1+\xi)^6} < \frac{h^6}{6(1-h)^6}.$$

Affinché risulti $|T_6(x)| < 0,003$, basta che sia $\frac{h}{1-h} < \sqrt[6]{0,018} = 0,511931\dots$. È dunque sufficiente che sia $\frac{h}{1-h} < 0,52$. L'ultima disuguaglianza equivale alla $h < \frac{0,52}{1,52} = 0,34210\dots$. In conclusione, basta prendere, per esempio, un $h \leq 0,34$.

Si vede dagli esempi che il problema da risolvere è espresso dalle disequazioni

$$(|T_{n+1}(x)| < \varepsilon) \wedge (|x| < h).$$

In questo sistema ci sono, in sostanza, 3 quantità: l'errore ε , il numero n e il raggio h . Se ne fissano 2 e si cerca di valutare il terzo.

TEOREMA 25. (Formula di Taylor - Peano) - Siano dati un intervallo I , un punto x_0 interno ad I e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ volte derivabile in I , allora si ha

$$f(x) = P_n(x) + \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x) \right] (x - x_0)^{n+1},$$

con $\beta(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$.

DIM. Per ipotesi, esiste anche P_{n+1} . Si può pertanto scrivere

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \alpha(x),$$

con $\alpha(x)$ infinitesimo di ordine maggiore di $n+1$. È dunque $\alpha(x) = \beta(x)(x - x_0)^{n+1}$, con $\beta(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$. In conclusione, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \beta(x)(x - x_0)^{n+1} = \\ &= P_n(x) + \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x) \right] (x - x_0)^{n+1}. \blacksquare \end{aligned}$$

Come vedremo nel prossimo paragrafo, questa formula serve essenzialmente per studiare il segno della funzione resto (detto *resto di Peano*)

$$f(x) - P_n(x) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x) \right] (x - x_0)^{n+1} = \varphi(x)(x - x_0)^{n+1}.$$

Tutto si riduce a studiare il segno di $\varphi(x)$, dato che quello dell'altro fattore non ha certo bisogno di molti commenti.

§ 9. CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, FLESSI

Ricordiamo che un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n è detto *convesso* se ogni volta che contiene due punti contiene anche tutto il segmento che li unisce.

Consideriamo le due funzioni di \mathbb{R}^+ in \mathbb{R} definite da $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = x - \frac{1}{x}$. Tutte due le funzioni tendono a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e tutte due ammettono la retta di equazione $y = x$ come asintoto. La f ha la concavità verso l'alto; risulta cioè convesso l'insieme (*sopragrafico*) $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^+, y \geq f(x)\}$. Invece, la g ha la concavità verso il basso; risulta cioè convesso l'insieme (*sottografico*) $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^+, y \leq f(x)\}$.

Ora, data una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita e continua su un intervallo I , si ha che l'insieme $\{(x, y): x \in I, y \geq f(x)\}$ [l'insieme $\{(x, y): x \in I, y \leq f(x)\}$] è convesso se e solo se, dati comunque tre punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha che il valore $f(x)$ è minore [maggiore] o uguale al valore della funzione lineare interpolatrice tra $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$.

DEFINIZIONE. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I .

Diremo che la f è *convessa* in I se, quali che siano i punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha:

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1).$$

Diremo che la f è *concava* in I se, quali che siano i punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha:

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1).$$

TEOREMA 26. Siano dati un intervallo I e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in I . Se è $f''(x) > 0$ [< 0] per ogni x interno ad I , allora la f è convessa [concava] in I .

DIM. Sia $f''(x) > 0$ per ogni x interno ad I e fissiamo tre punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$). Dobbiamo provare che è $f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1)$, ossia che è

$$(f(x) - f(x_1))(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1) < 0.$$

Ora, con successive applicazione del Teorema di Lagrange, si ha:

$$\begin{aligned} & (f(x) - f(x_1))(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1) = \\ & = (f(x) - f(x_1))(x_2 - x + x - x_1) - (f(x_2) - f(x) + f(x) - f(x_1))(x - x_1) = \\ & = (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) + (f(x) - f(x_1))(x - x_1) - (f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x - x_1) = \\ & = (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) - (f(x_2) - f(x))(x - x_1) = \\ & = f'(\xi_1)(x - x_1)(x_2 - x) - f'(\xi_2)(x_2 - x)(x - x_1) = (f'(\xi_1) - f'(\xi_2))(x - x_1)(x_2 - x) = \\ & = f''(\xi)(\xi_1 - \xi_2)(x - x_1)(x_2 - x) < 0. \end{aligned}$$

Infatti è $\xi_1 - \xi_2 < 0$, dato che è $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ e, per ipotesi, è $f''(\xi) > 0$. ■

ESEMPIO. 1) La funzione esponenziale è convessa, essendo $f''(x) = e^x > 0$ per ogni x .

La funzione di \mathbb{R}^+ in \mathbb{R} definite da $f(x) = x + 1/x$ è convessa, dato che è $f''(x) = 2/x^3 > 0$.

La funzione di \mathbb{R}^+ in \mathbb{R} definite da $g(x) = x - 1/x$ è concava, dato che è $f''(x) = -2/x^3 < 0$.

Passiamo allo studio delle cosiddette *proprietà locali del secondo ordine* di una funzione.

L'idea è semplice. Le proprietà locali del primo ordine di una funzione f riguardavano il confronto dei valori della f con $f(x_0)$; ora, supposta la f derivabile in x_0 , confronteremo $f(x)$ con il valore dell'approssimante lineare della f relativo ad x_0 .

DEFINIZIONE. Sono dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in I$.

Si dice che la f è *convessa* in x_0 se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno* U di x_0 tale che da $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Si dice che la f è *concava* in x_0 se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno* U di x_0 tale che da $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Si dice che un punto x_0 interno ad I è di *flesso ascendente* per la f se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno* U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$ si ha che

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{e} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si dice che un punto x_0 interno ad I è di *flesso discendente* per la f se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno* U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$ si ha che

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{e} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

ESEMPIO. 2) La funzione esponenziale è convessa in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Dalla formula di Taylor si ha, infatti, $e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{\xi}}{2}(x - x_0)^2 > e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$.

3) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 - x$. Nel punto -1 la funzione è concava; infatti si ha $f(x) < f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ per ogni $x < 0$, con $x \neq -1$, come si constata facilmente con un sommario studio della funzione $x^3 - x - 2(x + 1)$. Si vede analogamente che in 1 la funzione è convessa. Si constata, infine, che lo 0 è punto di flesso ascendente per la f .

TEOREMA 27. Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e un punto $x_0 \in I$.

- 1) Se è $f''(x_0) > 0$ allora la f è convessa in x_0 .
- 2) Se è $f''(x_0) < 0$ allora la f è concava in x_0 .
- 3) Se x_0 è punto di flesso per la f , allora si ha $f''(x_0) = 0$.

DIM. 1) Utilizziamo la formula di Taylor - Peano. Si ha

$$f(x) - \bar{f}(x) = \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \beta(x) \right] (x - x_0)^2, \text{ con } \beta(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \beta(x) \right] = \frac{f''(x_0)}{2!} > 0$, per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno U di x_0 in cui la funzione entro parentesi quadra è positiva. Per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ è dunque $f(x) - \bar{f}(x) > 0$.

La (2) si prova in modo perfettamente analogo. La (3) è un'immediata conseguenza delle altre due, dato che in un punto di flesso la f non può essere né concava né convessa. ■

L'esistenza della derivata seconda in x_0 non è condizione necessaria per la convessità o concavità di una funzione in x_0 né affinché x_0 sia di flesso.

ESEMPIO. 4) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale x^2 se è $x \leq 0$ e x^3 se è $x > 0$. La f è convessa in 0 , ma non esiste $f''(0)$. La funzione $-f$ è concava in 0 ma non ha ivi derivata seconda. La funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che vale x^3 se è $x \leq 0$ e x^2 se è $x > 0$ ha in 0 un punto di flesso ma, ancora una volta, non esiste derivata seconda in 0 .

Osserviamo che in un punto di massimo o minimo x_0 interno ad I in cui la f è derivabile, si ha $\overline{f}(x) = f(x_0)$. Ne consegue che la f è, rispettivamente, concava o convessa in x_0 . Dunque:

COROLLARIO 28. - Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e un punto x_0 interno ad I .

1) Se è $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo relativo per la f .

2) Se è $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo relativo per la f . ■

Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in un punto x_0 interno ad I e sia $f'(x_0) = 0$. Mostriamo con esempi che da queste ipotesi nulla si può dedurre circa le proprietà della f in x_0 .

ESEMPIO. 5) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di minimo.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x^2$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di massimo.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di flesso.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 non è

né di massimo, né di minimo, né di flesso.

Stabiliamo, in fine, due condizioni sufficienti affinché un punto sia di flesso.

TEOREMA 29. Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e un punto x_0 interno ad I , con $f''(x_0) = 0$.

1) Se esiste un intorno U di x_0 dove si ha $f''(x) < 0$ per $x < x_0$, $f''(x) > 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è punto di flesso ascendente per la f .

2) Se esiste un intorno U di x_0 dove si ha $f''(x) > 0$ per $x < x_0$, $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è punto di flesso discendente per la f .

DIM. 1) Usando la formula di Taylor - Lagrange; per $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f(x) - \overline{f}(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2.$$

Dunque $f(x) - \overline{f}(x)$ ha il segno di $f''(\xi)$ che è il segno di $x - x_0$.

La (2) si prova in modo analogo. ■

TEOREMA 30. Siano dati un intervallo I , una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e un punto x_0 interno ad I con $f''(x_0) = 0$. Se esiste anche $f'''(x_0)$ ed è $f'''(x_0) > 0$ [$f'''(x_0) < 0$], allora x_0 è punto di flesso ascendente [discendente] per la f .

DIM. Sia, per esempio, $f'''(x_0) > 0$. La derivata seconda esiste in un intorno U di x_0 ed è crescente in x_0 . Essendo $f''(x_0) = 0$, la derivata seconda è negativa in un intorno sinistro e positiva in un intorno destro di x_0 . Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema precedente. ■

Segnaliamo che alcuni risultati dei Teoremi precedenti possono essere generalizzati.

TEOREMA 31. Siano dati un intervallo I e una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n volte derivabile in un punto x_0 interno ad I . Se è $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora:

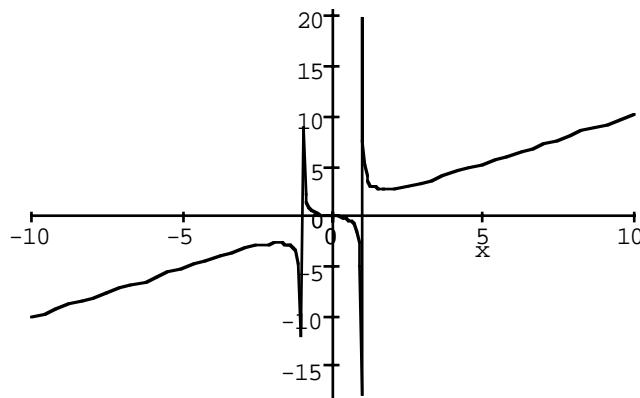
1) se n è dispari, x_0 è punto di flesso per la f .

2) se n è pari, x_0 è punto di convessità se è $f^{(n)}(x_0) > 0$, di concavità se è $f^{(n)}(x_0) < 0$. ■

Possiamo ora affrontare gli studi di funzione in modo più completo.

ESEMPLI. 6) Studio della funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

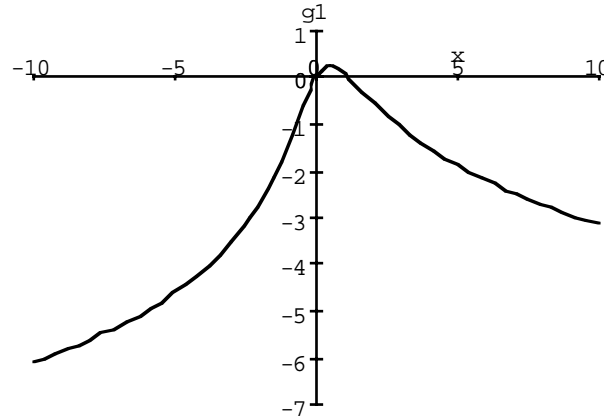
- *Dominio e segni:* $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; $f(0) = 0$.
- *Limiti:* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
- *Asintoto:* $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$; asintoto; $y = x$.
- *Segno di $f(x) - x$:* $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- *Derivata prima:* $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.
- *Segno di f' ed estremi di f :* $f'(x) > 0$ se e solo se è $|x| > \sqrt{3}$. Qui la f è crescente.
 $x_1 = -\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo; $x_2 = \sqrt{3}$ è di minimo relativo;
 $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.
- *Limiti di $f'(x)$:* $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\infty$.
- *Derivata seconda:* $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.
- *Segno di f'' ; Convessità, flessi:* $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.
 La f è convessa per $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; 0 è punto di flesso discendente con $f'(0) = 0$.
 A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



7) Studio della funzione $f(x) = \arctg x - \log(1 + x^2)$.

- *Dominio:* $E = \mathbb{R}$; $f(0) = 0$.
- *Limiti:* $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.
- *Derivata prima:* $f'(x) = \frac{1 - 2x}{1 + x^2}$.
- *Segno di f' ed estremi di f :* $f'(x) > 0$ se e solo se è $x < \frac{1}{2}$. Qui la f è crescente.
 $x_0 = \frac{1}{2}$ è punto di massimo relativo; $\inf f = -\infty$; $\max f = f(1/2)$.
- *Limiti di $f'(x)$:* $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.
- *Derivata seconda:* $f''(x) = -2 \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.
- *Segno di f'' , convessità, flessi:* $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in A =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$,

con $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Qui la f è convessa. I punti x_1 e x_2 sono punti di flesso. A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



8) Studio della funzione $f(x) = \frac{\log x}{(1+x)^2}$.

– Dominio e segni: $E = \{x: x > 0\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

– Limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

– Derivata prima: $f'(x) = \frac{\frac{x+1}{x} - 2 \log x}{(1+x)^3} = \frac{\varphi(x)}{(1+x)^3}$.

– Segno di f' : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

– Studio sommario di $\varphi(x)$. Dominio: E . $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$;

$\varphi'(x) = -\frac{2x+1}{x^2} < 0$. La φ è continua e decrescente; si annulla in un punto $\alpha \in]2; 3[$,

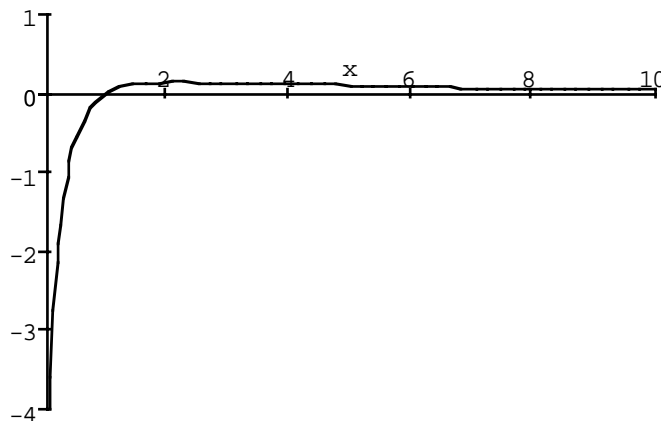
dato che è $\varphi(2) > 0$ e $\varphi(3) < 0$.

Si ha dunque $f'(x) > 0$ per $x \in]0; \alpha[$; α è punto di massimo relativo;

$\inf f = -\infty$; $\sup f = f(\alpha)$.

– Limiti di $f'(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Non è il caso di affrontare lo studio della derivata seconda. Ora comunque è facile disegnare il grafico della funzione.



§ 10. ESERCIZI

1) Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & (1+x^3)^5; \quad \sin^3 x; \quad (1+e^x)^{2/3}; \quad \sqrt[3]{\sin x + 2\cos x}; \quad \log \operatorname{tg}(x/2); \quad \operatorname{Ch}(\operatorname{Sh} x); \\ & \arcsin \sqrt{x-1}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x; \quad \log \log \log x; \quad \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}\right); \quad \log 5x; \\ & (x^2+x-1)e^x; \quad x\sqrt{\arcsin x}; \quad x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad xe^{x/2} \cos x; \quad (x-\cos x)\sqrt{x+\sin x}; \\ & \frac{1+\cos x}{x-\sin x}; \quad \frac{1}{x^4+x-1}; \quad \frac{e^x}{\sin x - \cos 2x}; \quad \frac{\sqrt[3]{x^2+1}+x}{x \log x}; \quad \operatorname{arctg} \frac{2-x^2}{2+x^2}. \end{aligned}$$

2) Scrivere le espressioni delle approssimanti lineari delle funzioni

$$\arcsin 2x; \quad \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{Sh}(x+1); \quad \sqrt{\sin x + 2\cos x}; \quad \text{con } x_0 = 0.$$

$$\log x; \quad \operatorname{arctg} x; \quad \sqrt{x}; \quad x^x; \quad (x^2+x-1)e^x; \quad \text{con } x_0 = 1.$$

3) Si studino, senza calcolare la derivata seconda, le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin^3 x - \cos^3 x; \quad f(x) = \cos x \cos 2x; \quad f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}; \quad f(x) = \log(1 + |x|) - \frac{1}{x}.$$

4) Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che sia applicabile il Teorema di Lagrange e si calcolino i punti di Lagrange.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ be^x - 2, & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{per } 0 \leq x \leq 2\pi/3 \\ a + b \cos x, & \text{per } 2\pi/3 < x \leq \pi. \end{cases}$$

5) Si ricerchino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \log(1+x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x});$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\log^2 x + \log x + 1} - \sqrt{\log^2 x - \log x + 1}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2x + x^2}{x - \operatorname{tg} x - 2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[x - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right];$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 - \sqrt{2} \cos x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - \frac{1}{3}x^3}{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos^3 x - 3 \sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right]^x.$$

6) Si dica se è derivabile nel punto $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log \frac{e^x - 1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

7) Si studino, il più accuratamente possibile le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1 - \log x)^2; & f(x) &= \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}; & f(x) &= \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + 1}}; \\ f(x) &= \frac{x^3}{x^2 - x - 2}; & f(x) &= x^2(\log|x| - 1); & f(x) &= \frac{x}{x + \log x}; & f(x) &= (x - 1)e^{1/x}; \\ f(x) &= x(1 - e^{-x}); & f(x) &= (x^2 + 1)e^{-|x - 1|}; & f(x) &= \sqrt[3]{x}e^x; \\ f(x) &= \log|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}; & f(x) &= \frac{x}{3} + \sqrt[3]{2 - x}. \end{aligned}$$

8) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è concava su tutto \mathbb{R}^+ la funzione

$$f(x) = \log x + kx^2?$$

9) Si scriva il polinomio approssimante $P_4(x)$ di ciascuna delle funzioni

$$f(x) = x \cos x, \text{ con } x_0 = \pi; \quad f(x) = \cos 2x, \text{ con } x_0 = 0; \quad f(x) = e^x \cos x, \text{ con } x_0 = 0.$$

10) Si ricerchi l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$ delle funzioni:

$$x^3 - 3x + 3 \arctg x; \quad \log(1 + x) - x - \frac{x^2}{2}; \quad \frac{1 - x^x}{\log x}; \quad \sqrt[3]{\cos x} - \cos \sqrt[3]{x}.$$

11) Due vetrai debbono trasportare una lastra di vetro attraverso un corridoio che è formato da due tratti tra loro perpendicolari e di larghezza a e b rispettivamente. Qual è la lunghezza massima di una lastra che si può far passare attraverso il corridoio?

12) Fra tutti i coni circolari retti di dato volume si ricerchi quello che ha superficie laterale minima.

13) - Supposto $a > 0$, si veda se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione $a^x = x^a$.

14) - Si calcoli $\log 2$ con 4 cifre decimali esatte.